ESTIMACIÓN DE LA ESTRUCTURA DE TASAS NOMINALES DE CHILE: APLICACIÓN DEL MODELO DINÁMICO NELSON-SIEGEL

Rodrigo Alfaro A.[*]
Sebastián Becerra C.[**]
Andrés Sagner T.[***]

I. Introducción

La estimación de la estructura de tasas de interés ha sido una tarea de interés, tanto para los analistas financieros como para los académicos. Los modelos de un solo factor, usualmente derivados en tiempo continuo como Vasicek (1977) y Cox, Ingersoll y Ross (1985), cumplen con el principio de no-arbitraje, pero muestran un débil ajuste a los datos (Wilmott, 2007). Esta evidencia ha llevado a los analistas a preferir métodos matemáticos más flexibles que permitan un mejor ajuste. En esta línea, uno de los trabajos más destacados es el de Nelson y Siegel (1987), quienes proponen un modelo que no solo presenta un ajuste razonable a los datos, sino que además contiene tasas cortas y largas que son bien definidas. Diebold y Li (2006) señalan que los tres factores que caracterizan este modelo (nivel, pendiente y curvatura) son precisamente los que le permiten un buen ajuste empírico. Coroneo, Nyholm y Vidova-Koleva (2008) reportan una amplia lista de organizaciones públicas, bancos de inversión y bancos centrales que utilizan el modelo, o extensiones de este, tanto para ajustar la curva de rendimiento como para realizar proyecciones. Dentro de las extensiones, destaca Svensson (1994) quien incorpora un cuarto factor que correspondería a una segunda curvatura, permitiendo así una flexibilidad aún mayor del modelo.

Shreve (2004), por su parte, presenta la extensión para dos factores de los modelos de Vasicek y Cox-Ingersoll-Ross (CIR). El autor muestra que el modelo de Vasicek tiene forma cerrada, mientras que para el caso de CIR la resolución es numérica.[1] En ambos casos, los modelos se obtienen luego de imponer que no existe posibilidad de arbitraje, propiedad que también es reconocida para la versión dinámica del modelo de Nelson-Siegel (DNS, de aquí en adelante) propuesta inicialmente por Diebold y Li (2006) en una aplicación empírica de predicción con factores dinámicos. Christensen, Diebold y Rudebusch (2009) presentan los resultados manteniendo la modelación en tiempo continuo, mientras que Alfaro (2011) utiliza el factor de descuento estocástico tal como se plantea en Campbell, Lo y MacKinlay (1997). Bajo homocedasticidad de los factores, sus resultados indican que, en caso de no poder ignorar dicho término, este podría ser entonces considerado como un premio por plazo.

En este artículo presentamos una derivación alternativa del modelo DNS basada en la Hipótesis de Expectativas en Logaritmos. Dicho resultado se obtiene de una modelación explícita de la dinámica de los factores que lo componen (nivel, pendiente y curvatura). Por la imposición de una raíz unitaria en el modelo, demostramos dos propiedades de series de tiempo esperadas para las tasas de interés: (i) la modelación de cada una de ellas debiera ser ARIMA(2,1,2), y (ii) existen relaciones de largo plazo (cointegración) que involucran tres tasas

[*] *BBVA Research. E-mail: ralfaro@bbva.com*
[**] *Gerencia de Investigación Financiera, Banco Central de Chile. E-mail: jbecerra@bcentral.cl*
[***] *Gerencia de Investigación Financiera, Banco Central de Chile. E-mail: asagner@bcentral.cl*

1. El modelo de Vasicek (1977) asume normalidad de los factores, por lo que la suma de estos mantiene dicha propiedad. En el caso de CIR, los factores tienen distribuciones no negativas y la identificación de los parámetros es altamente no lineal.

de distinta madurez. Si bien el primer elemento puede ser útil para determinar empíricamente los parámetros del modelo, notamos que Campbell, Lo y MacKinlay (1997) señalan que los datos siempre rechazarán esta condición de sobre-identificación. Por ello, este artículo explota las relaciones de largo plazo para identificar los parámetros del modelo. Nuestros resultados se encuentran en línea con los de Herrera y Magendzo (1994) y Morales (2008) en lo que se refiere al parámetro de persistencia de los factores.

Adicionalmente, presentamos los resultados de un modelo macrofinanciero reducido donde se relacionan medidas de actividad y precios con los factores pendiente y curvatura de la estructura de tasas derivadas por DNS. Utilizando funciones de impulso-respuesta generalizadas para la identificación de los *shocks* estructurales, se observa la existencia de efectos entre variables financieras y reales. Destacamos el efecto que tienen las medidas de actividad sobre la pendiente, y el efecto que tiene la curvatura sobre la inflación. Si bien el primero ha sido reconocido y documentado en la literatura, el segundo parece ser más novedoso y guardaría relación con la "velocidad" de ajuste de la tasa de corto plazo a su valor de estado estacionario.

El artículo se organiza de la siguiente forma. En la sección II se presenta una revisión de la literatura, se desarrolla el modelo DNS y se presentan los principales resultados teóricos obtenidos. En la sección III, se describe la estrategia empleada en la identificación de los parámetros del modelo para Chile. La sección IV analiza la interacción dinámica entre los factores de la estructura de tasas estimadas y un conjunto de variables macroeconómicas mediante estimaciones VAR. Finalmente, la sección V concluye.

II. Discusión Teórica y Empírica del Modelo DNS

En esta sección presentamos la revisión de la literatura referida a la estimación de la curva de rendimiento en Chile para luego desarrollar en extenso el modelo dinámico de Nelson-Siegel (DNS), y presentar sus principales propiedades.[2] La sección cierra con las dificultades empíricas relacionadas con la estimación de los factores del modelo.

1. Literatura sobre Estructura de Tasas

Para Chile se han realizado varios estudios que intentan modelar la estructura de tasas de interés a través de distintos métodos. Uno de los primeros trabajos es el desarrollado por Herrera y Magendzo (1997), quienes utilizan los PRC (pagarés reajustables con cupones del Banco Central de Chile) para estimar el modelo de Nelson y Siegel (1987) por mínimos cuadrados no lineales utilizando información tanto de las licitaciones de estos instrumentos como de las transacciones del mercado secundario obtenidas de la Bolsa de Comercio de Santiago. Su metodología consiste en encontrar los factores de descuento que minimizan la distancia entre el precio observado del bono y el estimado. Los autores presentan resultados para las tasas reales entre marzo y junio de 1996, y encuentran que, en promedio, la curva de rendimiento tiene pendiente positiva, existiendo así un premio positivo para los pagarés a mayores plazos. En particular, se encuentra un *spread* entre los PRBC (Pagarés Reajustables del Banco Central de Chile) a 90 días y los PRC a 8 años de 26%. Con la misma metodología, Zúñiga y Soria (1999) estiman empíricamente la estructura temporal de tasas de interés para el período comprendido entre 1994 y 1997 utilizando los bonos de reconocimiento y los pagarés reajustables del Banco Central de Chile transados en la Bolsa de Comercio de Santiago. Agregando la información diaria en un promedio mensual estiman la curva de rendimiento, obteniendo así 48 estimaciones de los parámetros que permiten construir las curvas *spot* y *forward*, donde la primera es siempre descendente.

Por otro lado, Parisi (1998) utiliza instrumentos nominales (pagarés descontables del Banco Central de Chile, PDBC) para el período 1983 a 1995, y estima por GMM una curva de modelos afines para la tasa de interés

2. *Las demostraciones de las proposiciones técnicas se encuentran en el Apéndice.*

de corto plazo derivada de los modelos de Vasicek (1977) y Cox, Ingersoll y Ross (1985). Esta modelación corresponde a la estimación de un factor posiblemente no homocedástico y se basa en la investigación empírica de Chan et al. (1992). Zúñiga (1999) extiende este análisis mediante máxima verosimilitud para considerar modelos de varianza condicional del tipo GARCH; en tanto, Fernández (1999) realiza estimaciones utilizando la tasa promedio de depósitos interbancarios como una aproximación de los PDBC, a través de métodos no paramétricos.

Lefort y Walker (2000) caracterizan la estructura de tasas de interés reales y sus cambios a través del tiempo en intervalos de 15 días para el período comprendido entre 1992 y 1998. Los autores utilizan información diaria para obtener estimaciones a mitad y a fin de mes, incluyendo datos del mercado secundario, primario, bonos de reconocimiento, PRBC y PRC. Estimando el modelo de Nelson y Siegel encuentran un buen grado de ajuste para la curva de rendimiento, además de una fuerte persistencia de los factores estacionarios del modelo.

Una segunda ola de trabajos de curvas afines se inicia con Ochoa (2006) quien extiende el modelo de Vasicek (1977) con un componente no observado siguiendo a Balduzzi, Das y Foresi (1998), mientras que Cortázar, Schwartz y Naranjo (2007) utilizan de manera comercial un modelo de tres factores para estimar la curva de rendimiento de bonos tanto de gobierno como de empresas. En ambos casos, el objetivo es minimizar las diferencias en los precios de los instrumentos, para lo cual realizan las estimaciones utilizando el filtro de Kalman. Ochoa (2006) permite la estimación con un factor no observado, y Cortázar, Schwartz y Naranjo (2007) permiten también la estimación con transacciones infrecuentes. Morales (2008) utiliza tasas de interés reajustables y explora la motivación de Diebold y Li (2006) al considerar el modelo DNS y su relación con factores macroeconómicos utilizando estimaciones VAR. El autor muestra que el algoritmo simplificado de dos etapas propuesto por Diebold y Li (2006), el cual implica calibrar el parámetro no lineal y realizar estimaciones lineales, no genera diferencias mayores que la estimación con filtro de Kalman.

Finalmente, Alfaro (2011) propone una versión discreta del modelo DNS y demuestra que el modelo pertenece a la clase de los modelos "afines". Esta es una prueba alternativa a la presentada por Christensen, Diebold y Rudebusch (2009), quienes basan sus resultados en la existencia de no-arbitraje.

2. Modelo Dinámico Nelson-Siegel

Nelson y Siegel (1987) establecen un modelo de tiempo continuo donde la tasa de madurez n, $z(n)$, corresponde a la siguiente forma funcional:

$$z(n) = \lambda_1 + \lambda_2 \left[\frac{1-\exp(-\alpha n)}{\alpha n} \right] + \lambda_3 \left[\frac{1-\exp(-\alpha n)}{\alpha n} - \exp(-\alpha n) \right], \tag{1}$$

donde $\alpha > 0$ es un parámetro no lineal, el cual supondremos conocido por el investigador, mientras que los parámetros λ son estimados para las distintas fechas en las que se desea computar la curva de rendimiento y los definiremos como factores de la curva. Esta forma funcional ha sido bastante cómoda para ajustar los diversos perfiles de la curva de rendimiento observados en distintos países.

A diferencia de los ajustes vía polinomios, la forma funcional propuesta por los autores contiene en los límites inferior y superior valores acotados para las tasas. En particular, notamos que la función $exp(\alpha n)$ toma valor 1 cuando la madurez es 0, mientras que converge a 0 cuando la madurez es grande ($n \to \infty$). Dado que, en general, la madurez se mide en número de meses, n puede tomar un valor máximo de 360 (bono a 30 años). Debido a que la función exponencial es acotada, podemos obtener valores exactos para los casos en que la madurez es cero (tasa instantánea), y para una tasa ficticia cuya madurez es infinita. En el primer caso, el elemento que acompaña al segundo factor converge a 1, mientras que el elemento asociado al tercer factor se hace 0. De este modo, la tasa más corta del modelo es simplemente la suma de los primeros dos factores.

Para el caso de la tasa larga, tenemos que tanto el segundo como el tercer factor se hacen cero. Por tanto, la tasa larga del modelo corresponde solo al primer factor. En conclusión, el modelo implica que el primer factor corresponde a la tasa larga, mientras que el segundo es la diferencia entre la tasa corta y la tasa larga.

Diebold y Li (2006) establecen que el primer factor corresponde al *nivel* de la curva, y el segundo corresponde al negativo del premio por plazo. Este último se entiende como la diferencia entre la tasa larga y la tasa corta, e implica la *pendiente* de la curva de rendimiento. El tercer factor no participa en estas tasas, pero permite que el modelo sea lo suficientemente flexible como para acomodar distintas curvas de rendimiento, por lo que los autores lo denominan *curvatura*. Si bien el modelo Nelson-Siegel ha sido exitoso para ajustar curvas de rendimiento, es importante señalar que él contiene implicancias económicas que pueden ser interesantes para el análisis dinámico del mercado de instrumentos de renta fija.

Siguiendo a Alfaro (2011), tomaremos la versión discreta del modelo DNS, la cual puede ser entendida como una aproximación de la ecuación (1) cuando se considera $\phi = \exp(-\alpha)$ y se toma una aproximación de Taylor:

$$z_{nt} = \lambda_{1t} + \frac{\lambda_{2t}}{n}\left(\frac{1-\phi^n}{1-\phi}\right) + \frac{\lambda_{3t}}{n}\left[\left(\frac{1-\phi^n}{1-\phi}\right) - n\phi^{n-1}\right]. \tag{2}$$

Por la construcción del modelo discreto, observamos que la tasa corta corresponde a $n = 1$, es decir la tasa a 1 mes. Es fácil notar que, cuando $n = 1$, dicha tasa es la suma de los primeros dos factores, al igual que en el modelo de tiempo continuo. Por otra parte, la tasa larga se obtiene de igual forma que en el caso continuo (n grande).

3. Resultados Teóricos

El modelo DNS en tiempo discreto dado por la ecuación (2), puede obtenerse a través de la dinámica de los factores, para lo cual consideraremos dos supuestos: (i) la tasa corta es función de los dos primeros factores dinámicos, es decir, $z_{1t} = \lambda_{1t} + \lambda_{2t}$; y (ii) la tasa de madurez n es un promedio simple de las tasas cortas esperadas.

El primer supuesto se encuentra alineado con la discusión anterior por lo que se enmarca directamente, mientras que en el segundo imponemos como válida la hipótesis de expectativas en logaritmos (Campbell, Lo y MacKinlay, 1997), lo que implica que la tasa larga es el promedio de los valores esperados de las tasas cortas futuras:

$$z_{nt} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} E_t(z_{1t+i}). \tag{3}$$

Este último supuesto se basa en que la estrategia de compra de un bono largo y mantención a madurez ofrece una rentabilidad similar a la de comprar sucesivamente bonos cortos. Dado que las rentabilidades de los bonos cortos no son conocidas al inicio de la decisión de inversión, se consideran valores esperados.

El modelo DNS discreto se obtiene de utilizar la ecuación (3) e imponer cierta estructura dinámica a los factores que la componen. La siguiente proposición recoge dichos supuestos.

Proposición 1: Para obtener el modelo DNS presentado en (2), requerimos asumir ciertas dinámicas de los factores. En particular, el nivel o primer factor, debe ser una caminata aleatoria: $\lambda_{1t} = \lambda_{1t-1} + e_{1t}$, mientras que el segundo factor —que corresponde al negativo de la pendiente— debe ser $AR(1)$ estacionario con tendencia estocástica también $AR(1)$; esto es: $\lambda_{2t} = \phi\lambda_{2t-1} + (1-\phi)\lambda_{3t-1} + e_{2t}$, con $\lambda_{3t} = \phi\lambda_{3t-1} + e_{3t}$.

De la proposición anterior, notamos que los factores son dinámicos del tipo $AR(1)$; por ello es posible establecer una modelación en series de tiempo para las tasas de interés. Dado que las tasas son combinaciones lineales de estos factores, entonces una modelación $ARIMA(p,d,q)$ podría caracterizar cada una de ellas, resultado que resumimos en la siguiente proposición.

Proposición 2: El modelo DNS discreto implica que la tasas de madurez finita puede modelarse con un proceso $ARIMA(2,1,2)$. Las raíces del polinomio AR estacionario son iguales, mientras que los signos de los coeficientes del componente MA dependen de la madurez de la tasa.

Si bien la Proposición 2 nos entrega un camino directo para encontrar los parámetros del modelo, el hecho de que el modelo DNS cuente con tres factores fuerza a que la matriz de varianza y covarianza del modelo se encuentre sobreidentificada para más de tres tasas observadas. Campbell, Lo y MacKinlay (1997) discuten el hecho de que los datos siempre rechazarán esta condición de sobreidentificación.

Por lo anterior, en este artículo explotamos la relación de largo plazo (cointegración) de las tasas de interés. En esta línea, Hall, Anderson y Granger (1992) y Shea (1992) emplean esta metodología para testear la hipótesis de expectativas. En nuestro caso, se imponen restricciones adicionales para testear conjuntamente dicha hipótesis más un modelo dinámico de factores. La siguiente proposición resume los elementos que nos permiten explotar la relación de largo plazo.

Proposición 3: Si se seleccionan tres tasas de interés de distinta madurez, entonces pueden obtenerse los factores como una combinación lineal de dichas tasas de interés. En particular, los ponderadores del primer factor suman 1, mientras que los ponderadores del segundo y tercer factor suman 0. Con ello, se puede caracterizar directamente una cuarta tasa mediante las tres anteriores. Vale decir, existe θ_a, θ_b y θ_c, tal que $z_{nt} = \theta_a z_{at} + \theta_b z_{bt} + \theta_c z_{ct}$, donde $\theta_a + \theta_b + \theta_c = 1$.

La Proposición 3 implica que la estimación del parámetro ϕ puede realizarse explotando la relación de cointegración de las tasas de interés. A su vez, esto implica que es necesario imponer restricciones sobre los parámetros.

4. Implementación Empírica

En la práctica, y debido a la inexistencia de bonos cero para los tramos más largos en la curva de rendimiento, la implementación empírica del modelo DNS utiliza la TIR de un bono con madurez n (z_n) para calcular la duración D. En particular, la aproximación supone que z_n es equivalente a la tasa de un bono cero cupón cuya madurez es D (z_D). La relación es evidente si la curva de rendimiento es plana, en cuyo caso la TIR del bono será equivalente a la única tasa que representa la curva. Para los bonos de corta madurez, en general la duración coincide con la madurez, debido a que el pago del principal es relativamente más importante que los pagos de los cupones comprometidos. Alfaro y Becerra (2011) investigan sobre los errores de utilizar esta aproximación bajo el supuesto de que la estructura de tasas se rige por el modelo DNS. Los autores concluyen que el error de la aproximación conlleva 5 puntos base en el caso que la curva de rendimiento presente pendiente o curvatura moderada (cuadro 1). Por otro lado, los instrumentos que se transan en un determinado momento pueden impactar en la estimación de la curva debido a que ellos, en general, se concentran en algunos tramos específicos. Los *benchmarks* son aproximaciones a puntos de la curva que tienen mayor profundidad, por lo que podrían evitar sobreajustes a tramos que están muy transados y subajustes a tramos de baja profundidad. La mayoría de los cálculos para *benchmark* son mecánicos y no contienen supuestos sobre la curva. Por ejemplo el *benchmark* para un bono a 5 años podría incluir todos aquellos bonos que se transan en el período determinado y cuya madurez es entre 3.5 y 6 años.

CUADRO 1

Error de Aproximación TIR/Duración[a]
(puntos base)

	Madurez			Duración		
	C = 3%	C = 5%	C = 8%	C = 3%	C = 5%	C = 8%
BCP-2	1	2	3	1	2	3
BCP-5	6	9	13	3	5	7
BCP-10	9	14	19	2	4	5

Fuente: Alfaro y Becerra (2011).
a. BCPx bono bullet emitido a x años por el Banco Central de Chile con tasa de cupón C. Los valores del cuadro se obtienen entre el cálculo exacto de la TIR y su aproximación con la duración bajo el modelo Nelson-Siegel. Por ejemplo, para un BCP a 5 años, existe un error de 7 pb si el bono tiene un cupón de 8%.

Finalmente, la estimación del modelo DNS puede realizarse por el filtro de Kalman, como lo realizan Cortázar, Schwartz y Naranjo (2007), o Tapia (2008) para el caso de Chile. En este último trabajo se reporta una baja estabilidad en la estimación mediante este procedimiento. Esto es un problema conocido en la estimación de estructura de tasas (Duffee, 2002). En particular, Söderlind (2010) propone una solución en la cual el modelo final se estima sobre la base de valores iniciales generados por un modelo con menos factores. En este trabajo se realizan estimaciones en dos etapas para identificar el parámetro ϕ y posteriormente los factores.

III. Estimación del Parámetro ϕ

En esta sección presentamos los resultados que se obtienen al estimar el parámetro de persistencia del segundo factor del modelo DNS (ϕ). Los primeros resultados se basan en calcular a través de una grilla el valor óptimo, para luego explotar los resultados de la Proposición 3 en los cuales se hace uso de la relación de cointegración entre las tasas.

Los datos utilizados en esta sección corresponden a las tasas de captación *prime* a 1, 3, 6 y 12 meses, y los bonos nominales (BCP) emitidos por el Banco Central de Chile a 2, 5 y 10 años desde julio de 2004 hasta junio de 2011, considerando como dato mensual el valor diario del cierre de mes.

1. Uso de Grilla

Para cada mes, se estima la ecuación (2) por mínimos cuadrados ordinarios utilizando un sencillo procedimiento de grilla sobre el parámetro no lineal que abarca valores desde $\phi = 0.70$ a $\phi = 0.99$ con intervalos de 0.01. Los resultados coinciden con los encontrados por Herrera y Magendzo (1997) y Morales (2008), quienes realizan la estimación de tasas indexadas para Chile (cuadro 2). Por ejemplo, vía la raíz del error cuadrático medio dentro de muestra (RMSE), se obtiene $\phi = 0.92$. Si basamos nuestra decisión en los criterios de información, obtenemos $\phi = 0.91$. Finalmente, bajo una medida de ajuste global como el R^2 Ajustado (R^2-A) encontramos que esta se maximiza con $\phi = 0.88$. Con todo, nuestros resultados indican que no existe gran diferencia si consideramos valores de ϕ entre 0.88 y 0.92. Por lo anterior, consideramos finalmente un valor promedio de 0.90 para dicho parámetro.

CUADRO 2

Criterios para Determinar ϕ[a]

ϕ	RMSE	BIC	AIC	R^2-A
0.70	0.340	2.325	2.488	0.775
0.71	0.333	2.102	2.265	0.780
0.72	0.325	1.872	2.035	0.786
0.73	0.318	1.635	1.797	0.791
0.74	0.310	1.391	1.553	0.795
0.75	0.302	1.139	1.301	0.799
0.76	0.295	0.879	1.042	0.803
0.77	0.287	0.611	0.774	0.806
0.78	0.280	0.335	0.497	0.808
0.79	0.272	0.049	0.212	0.810
0.80	0.265	-0.243	-0.081	0.811
0.81	0.258	-0.538	-0.376	0.811
0.82	0.251	-0.830	-0.667	0.810
0.83	0.244	-1.115	-0.953	0.808
0.84	0.237	-1.394	-1.232	0.805
0.85	0.231	-1.656	-1.493	0.801
0.86	0.226	-1.867	-1.705	0.806
0.87	0.221	-2.022	-1.859	0.800
0.88	0.217	-2.148	-1.986	**0.825**
0.89	0.214	-2.266	-2.104	0.818
0.90	0.211	-2.385	-2.223	0.810
0.91	0.210	**-2.466**	**-2.304**	0.824
0.92	**0.209**	-2.463	-2.301	0.816
0.93	0.211	-2.403	-2.240	0.818
0.94	0.214	-2.155	-1.993	0.809
0.95	0.219	-1.789	-1.626	0.800
0.96	0.226	-1.355	-1.192	0.790
0.97	0.234	-0.868	-0.706	0.779
0.98	0.243	-0.349	-0.187	0.778
0.99	0.254	0.192	0.354	0.755

Fuente: Elaboración propia.
a. Los criterios considerados corresponden a la raíz del error cuadrático medio dentro de muestra (RMSE), Schwarz (BIC), Akaike (AIC) y el coeficiente de ajuste global R^2 Ajustado (R^2A).

Alternativamente, podemos remover el primer factor de las tasas de interés con un filtro que elimine la tendencia estocástica contenida en ellas. Para esto, utilizamos un promedio móvil centrado de 13 períodos. De esta forma, se puede obtener el segundo y el tercer factor con el procedimiento anterior. En este contexto, la elección de ϕ aumenta a 0.97 si utilizamos RMSE o R^2-A. Los criterios de información de Akaike (AIC) y Schwarz (BIC), por su parte, arrojan valores iguales a 0.95 y 0.97, respectivamente (cuadro 3).

CUADRO 3

Criterios para Determinar ϕ con Datos Filtrados[a]

ϕ	RMSE	BIC	AIC	R^2-A
0.70	0.224	-3.183	-6.280	0.655
0.71	0.222	-3.318	-6.391	0.660
0.72	0.220	-3.457	-6.504	0.665
0.73	0.217	-3.598	-6.621	0.661
0.74	0.215	-3.742	-6.742	0.658
0.75	0.213	-3.888	-6.866	0.664
0.76	0.210	-4.037	-6.994	0.670
0.77	0.208	-4.187	-7.128	0.667
0.78	0.206	-4.339	-7.266	0.664
0.79	0.204	-4.492	-7.411	0.663
0.80	0.201	-4.647	-7.562	0.653
0.81	0.199	-4.806	-7.721	0.637
0.82	0.197	-4.969	-7.889	0.630
0.83	0.194	-5.141	-8.068	0.641
0.84	0.192	-5.329	-8.257	0.644
0.85	0.189	-5.539	-8.460	0.649
0.86	0.186	-5.783	-8.676	0.663
0.87	0.182	-6.073	-8.907	0.678
0.88	0.178	-6.422	-9.152	0.694
0.89	0.174	-6.844	-9.410	0.704
0.90	0.168	-7.346	-9.677	0.723
0.91	0.162	-7.914	-9.949	0.744
0.92	0.155	-8.540	-10.216	0.766
0.93	0.147	-9.241	-10.471	0.788
0.94	0.138	-10.043	-10.694	0.809
0.95	0.130	-10.962	**-10.846**	0.827
0.96	0.125	-11.656	-10.844	0.836
0.97	**0.125**	**-11.665**	-10.610	**0.845**
0.98	0.132	-10.971	-10.136	0.829
0.99	0.145	-9.518	-9.410	0.795

Fuente: Elaboración propia.
a Los criterios considerados corresponden a la raíz del error cuadrático medio dentro de muestra (RMSE), Schwarz (BIC), Akaike (AIC) y el coeficiente de ajuste global R^2 Ajustado (R^2A).

2. Relación de Cointegración

Sobre la base de la Proposición 3, se tomarán como regresores tres tipos de tasas: corta (uno, tres o seis meses), mediana (doce meses o dos años) y larga (cinco o diez años). Con ellas se estimarán para cada una de las cuatro tasas de interés restantes una regresión lineal imponiendo: (i) que la suma de los coeficientes sea 1, y (ii) que el cociente entre el coeficiente de la tasa corta sobre el de la tasa larga (θ_a/θ_b) satisfaga un cierto valor específico de ϕ. Las distintas combinaciones de tasas de interés implican que $\phi = 0.89$ maximiza el promedio armónico de las medidas de ajuste global R^2 obtenidas en las regresiones (cuadro 4).

CUADRO 4

Promedio Armónico R^2 de las Cuatro Regresiones[a, b]

Regresores / ϕ	0.85	0.86	0.87	0.88	0.89	0.90	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
Z_1, Z_{12}, Z_{60}	0.93	0.93	0.93	**0.93**	0.93	0.93	0.92	0.91	0.90	0.87	0.79	0.56	N/D	N/D	N/D
Z_1, Z_{12}, Z_{120}	0.97	0.97	0.97	**0.97**	0.97	0.97	0.96	0.96	0.95	0.94	0.91	0.86	0.74	0.36	N/D
Z_1, Z_{24}, Z_{60}	0.90	0.90	0.90	0.91	**0.91**	0.90	0.90	0.89	0.88	0.85	0.80	0.65	0.01	N/D	N/D
Z_1, Z_{24}, Z_{120}	0.96	0.96	0.96	0.97	0.97	0.97	**0.97**	0.97	0.97	0.96	0.96	0.94	0.92	0.89	0.85
Z_3, Z_{12}, Z_{60}	0.93	0.93	0.93	**0.93**	0.93	0.93	0.92	0.92	0.90	0.87	0.79	0.56	N/D	N/D	N/D
Z_3, Z_{12}, Z_{120}	0.97	0.97	0.97	**0.97**	0.97	0.97	0.96	0.96	0.95	0.94	0.92	0.87	0.79	0.57	N/D
Z_3, Z_{24}, Z_{60}	0.91	0.91	0.91	**0.91**	0.91	0.90	0.90	0.89	0.87	0.83	0.74	0.48	N/D	N/D	N/D
Z_3, Z_{24}, Z_{120}	0.96	0.97	0.97	0.97	0.97	0.97	**0.97**	0.97	0.97	0.97	0.96	0.95	0.92	0.89	0.85
Z_6, Z_{12}, Z_{60}	0.92	0.92	0.92	0.92	**0.92**	0.92	0.92	0.91	0.90	0.87	0.80	0.61	N/D	N/D	N/D
Z_6, Z_{12}, Z_{120}	0.96	0.96	0.96	0.96	**0.96**	0.96	0.96	0.96	0.95	0.94	0.93	0.89	0.83	0.72	0.45
Z_6, Z_{24}, Z_{60}	0.88	0.89	0.89	**0.89**	0.89	0.89	0.87	0.85	0.82	0.74	0.54	N/D	N/D	N/D	N/D
Z_6, Z_{24}, Z_{120}	0.95	0.95	0.96	0.96	0.97	0.97	**0.97**	0.97	0.96	0.96	0.95	0.93	0.91	0.88	0.85

Fuente: Elaboración propia.
a. Valores en negrita indican el máximo promedio armónico para el R^2. Como regresores se consideró una combinación de tasas según su plazo (corto, mediano y largo).
b. N/D: no disponible por ser negativo.

Finalmente, en el cuadro notamos que los residuos de cada una de las ecuaciones son estacionarios, lo que da cuenta de una relación de largo plazo (cointegración) entre las tasas de interés consideradas.

CUADRO 5

Test ADF sobre el Residuo de las Distintas Regresiones[a, b]

	$\phi = 0.88$				$\phi = 0.89$				$\phi = 0.90$				$\phi = 0.91$			
Regresores	**(1)**	**(2)**	**(3)**	**(4)**	**(1)**	**(2)**	**(3)**	**(4)**	**(1)**	**(2)**	**(3)**	**(4)**	**(1)**	**(2)**	**(3)**	**(4)**
Z_1, Z_{12}, Z_{60}	-5.00	-4.88	-4.67	-4.88	-5.42	-5.27	-4.66	-4.92	-5.79	-5.67	-4.63	-4.93	-6.01	-5.99	-4.60	-4.88
Z_1, Z_{12}, Z_{120}	-4.96	-4.84	-4.93	-4.97	-5.41	-5.29	-4.90	-5.01	-5.74	-5.71	-4.85	-5.01	-5.89	-5.98	-4.76	-4.92
Z_1, Z_{24}, Z_{60}	-5.11	-5.11	-4.71	-3.98	-5.21	-5.14	-4.70	-3.97	-5.27	-5.14	-4.68	-3.96	-5.28	-5.10	-4.64	-3.92
Z_1, Z_{24}, Z_{120}	-5.25	-5.31	-4.95	-4.07	-5.36	-5.33	-4.92	-4.07	-5.39	-5.29	-4.86	-4.06	-5.32	-5.18	-4.75	-4.05
Z_3, Z_{12}, Z_{60}	-5.06	-5.28	-4.62	-4.95	-5.50	-5.62	-4.59	-4.99	-5.84	-5.94	-4.56	-5.00	-6.03	-6.20	-4.52	-4.94
Z_3, Z_{12}, Z_{120}	-5.05	-5.28	-4.87	-5.05	-5.50	-5.69	-4.83	-5.09	-5.79	-6.03	-4.76	-5.08	-5.88	-6.25	-4.67	-4.98
Z_3, Z_{24}, Z_{60}	-4.66	-5.03	-4.67	-3.97	-4.82	-5.03	-4.64	-3.96	-4.93	-5.01	-4.60	-3.95	-4.96	-4.95	-4.54	-3.92
Z_3, Z_{24}, Z_{120}	-4.85	-5.24	-4.88	-4.07	-5.02	-5.22	-4.82	-4.08	-5.07	-5.15	-4.73	-4.08	-5.02	-5.03	-4.60	-4.08
Z_6, Z_{12}, Z_{60}	-4.28	-4.73	-4.50	-5.01	-4.81	-5.16	-4.47	-5.05	-5.31	-5.56	-4.43	-5.07	-5.70	-5.89	-4.39	-5.03
Z_6, Z_{12}, Z_{120}	-4.40	-4.83	-4.74	-5.12	-4.98	-5.32	-4.68	-5.16	-5.46	-5.74	-4.61	-5.17	-5.75	-6.01	-4.52	-5.10
Z_6, Z_{24}, Z_{60}	-3.71	-4.08	-4.47	-3.94	-3.89	-4.18	-4.40	-3.93	-4.02	-4.25	-4.33	-3.91	-4.07	-4.27	-4.25	-3.89
Z_6, Z_{24}, Z_{120}	-4.04	-4.38	-4.62	-4.07	-4.21	-4.47	-4.52	-4.09	-4.27	-4.48	-4.40	-4.11	-4.23	-4.42	-4.26	-4.13

Fuente: Elaboración propia.
a. Corresponde al Test de Dickey-Fuller Aumentado (ADF).
b. Los valores críticos asintóticos para el test de cointegración al 1%, 5% y 10% son -4.29, -3.74 y -3.45, respectivamente. Valores obtenidos de Davidson y MacKinnon (1993).

V. Aplicación Macroeconómica

En esta sección se estudia la interacción dinámica entre los factores de la estructura de tasas y un conjunto de variables macroeconómicas por medio de estimaciones del tipo *VAR*(p). En particular, las estimaciones consideran el negativo de la pendiente (λ_2) y la curvatura (λ_3) de la estructura de tasas obtenida en la sección anterior, y el ciclo económico es caracterizado por variables macroeconómicas (cuadro 6).[3]

CUADRO 6

Descripción de Variables Empleadas

Variable	Descripción	Unidades	Fuente	Observaciones
λ_2	Pendiente de la curva de rendimiento	%, anual	Elaboración propia.	
λ_3	Curvatura de la curva de rendimiento	%, anual	Elaboración propia.	
g	Variación del Índice Mensual de Actividad Económica	%, anual	BCCh[a]	
$\tilde{u}$	Tasa de desempleo desestacionalizada y filtrada	%, promedio trimestral	INE[b]	El filtro empleado corresponde a una media móvil centrada de 13 períodos.
$\tilde{\pi}$	Inflación	%, anual	INE[b]	Variación anual del IPC general.

a. Banco Central de Chile.
b. Instituto Nacional de Estadísticas.

El análisis de series de tiempo de las variables anteriores indica que ambos factores de la estructura de tasas de interés son estacionarios, mientras que todas las variables macroeconómicas son integradas de orden 1 (cuadro 7). El primer resultado es totalmente esperable debido a que $0 < \phi < 1$ de acuerdo con la Proposición 1. El segundo resultado, por su parte, nos señala la necesidad de transformar las variables que caracterizan el ciclo económico de tal forma que ellas sean estacionarias. En este sentido, la literatura *VAR* emplea tradicionalmente el componente cíclico de series no estacionarias obtenidas mediante el filtro Hodrick-Precott (HP). Sin embargo, es bien sabido que la utilización de este tipo de filtros conlleva un sinnúmero de problemas. Por ello se empleó un método alternativo similar al aplicado en la sección anterior: la tendencia de las series fue removida mediante una media móvil centrada de 13 períodos. Este procedimiento se aplicó para la tasa de desempleo y la inflación ($\tilde{u}$ y $\tilde{\pi}$, respectivamente). Para el caso del Imacec, en tanto, se utilizó la variación anual (g).

3. Se utiliza un número reducido de variables con el fin de mantener los grados de libertad en valores razonables debido a que la muestra abarca el período de julio 2004 a junio 2011, es decir, conforman una muestra de cerca de 85 observaciones.

CUADRO 7

Test de Raíces Unitarias[a]

Variable	*t*-statistic	*p*-value
λ_2	-3.566	0.009
λ_3	-4.132	0.002
g	-1.414	0.572
$\tilde{u}$	-1.326	0.614
$\tilde{\pi}$	-1.925	0.319

Fuente: Elaboración propia.
a. El test empleado corresponde a Phillips-Perron.

Con todo, el modelo *VAR*(*p*) se puede describir formalmente como:

$$X_t = c + \sum_{i=1}^{p} \Phi_i X_{t-i} + \varepsilon_t \tag{4}$$

donde $X_t' = [\lambda_{2,t}, \lambda_{3,t}, g_t, \tilde{u}_t, \tilde{\pi}_t]$ y el vector de errores ε_t se supone independiente e idénticamente distribuido normal, con media cero y matriz de varianzas Ω. De (4) notamos que la estimación del modelo *VAR*(*p*) requiere conocer la estructura de rezagos *p*. Para lo anterior (cuadro 8), optamos por un *VAR*(2) basado en el error de predicción final (*FPE*) y los criterios de información de Akaike y Hannan-Quinn (*AIC* y *HQ*, respectivamente).

CUADRO 8

Criterios de Elección de Rezagos[a,b]

Rezago	log(L)	LR	FPEc	AIC	BIC	HQ
0	1,259.261		742.000	-32.161	-32.009	-32.100
1	1,457.084	365.213	8.840	-36.592	**-35.685**	-36.229
2	1,495.576	66.127	**6.310**	**-36.938**	-35.276	**-36.273**
3	1,516.490	33.248	7.150	-36.833	-34.416	-35.865
4	1,544.736	**41.282**	6.830	-36.916	-33.744	-35.646

Fuente: Elaboración propia.
a. Los criterios considerados corresponden al Test de Razón de Verosimilitud (LR), Error de Predicción Final (FPE), Akaike (AIC), Schwarz (BIC) y Hannan-Quinn (HQ)
b. Valores en negrita indican rezago seleccionado por el respectivo criterio.
c. Valores x10-23.

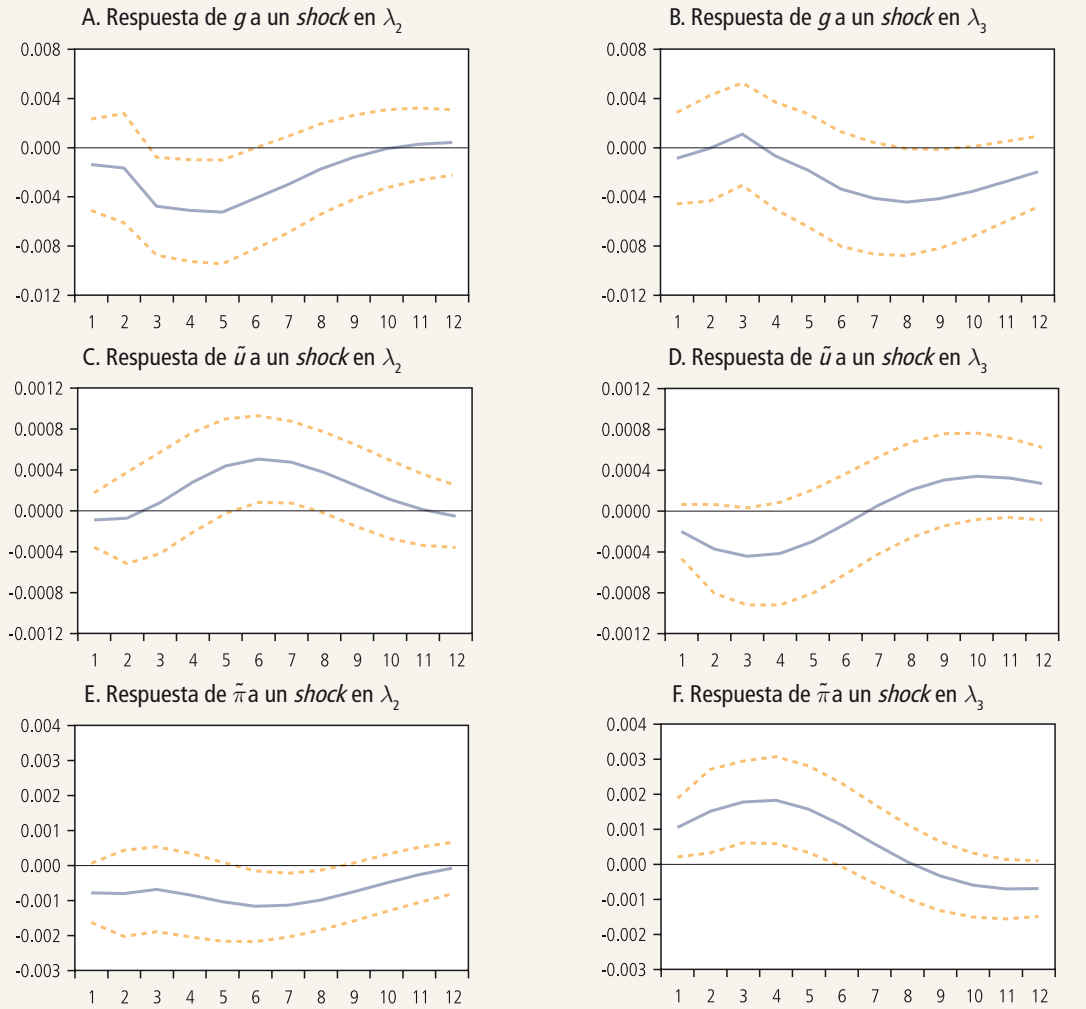
La identificación de los *shocks* estructurales del modelo *VAR*(2) fue realizada mediante los impulso-respuesta generalizados popularizados por Pesaran y Shin (1998), debido a que esta estrategia no requiere la ortogonalización de los *shocks* y es invariante al orden causal recursivo de las variables del *VAR*.[4]

El gráfico 1 muestra la respuesta del sector real de la economía ante *shocks* transitorios en el mercado financiero. Un primer resultado que se desprende de este gráfico, y que se encuentra en línea con Estrella y

4. La robustez de nuestros resultados fue examinada empleando estrategias de identificación alternativas (no reportadas). En particular, los resultados obtenidos son similares a la estrategia empleada por Diebold, Rudebush y Aruoba (2006), la cual consiste en una descomposición Cholesky y ordenar primero las variables macroeconómicas seguidas de los factores de la estructura de tasas.

GRÁFICO 1

Respuesta del Sector Real a un *Shock* en el Sector Financiero



Fuente: Elaboración propia.

Hardouvelis (1991), corresponde a la disminución (aumento) de la actividad económica ante una disminución (aumento) en la pendiente de la estructura de tasas de interés.[5] A diferencia de la evidencia reportada por Morales (2008), la actividad económica reacciona entre tres y seis meses luego de ocurrido el *shock* en el sector financiero, mientras que en términos de la tasa de desempleo, la respuesta de dicha variable ocurre con un semestre de rezago.

Un segundo resultado que se observa a partir del gráfico 1 corresponde al aumento de la inflación ante aumentos de la curvatura de la estructura de tasas. De acuerdo con Alfaro y Sagner (2011), la curvatura puede interpretarse como la "velocidad" a la cual las tasas de interés de corto plazo de la economía convergen a su

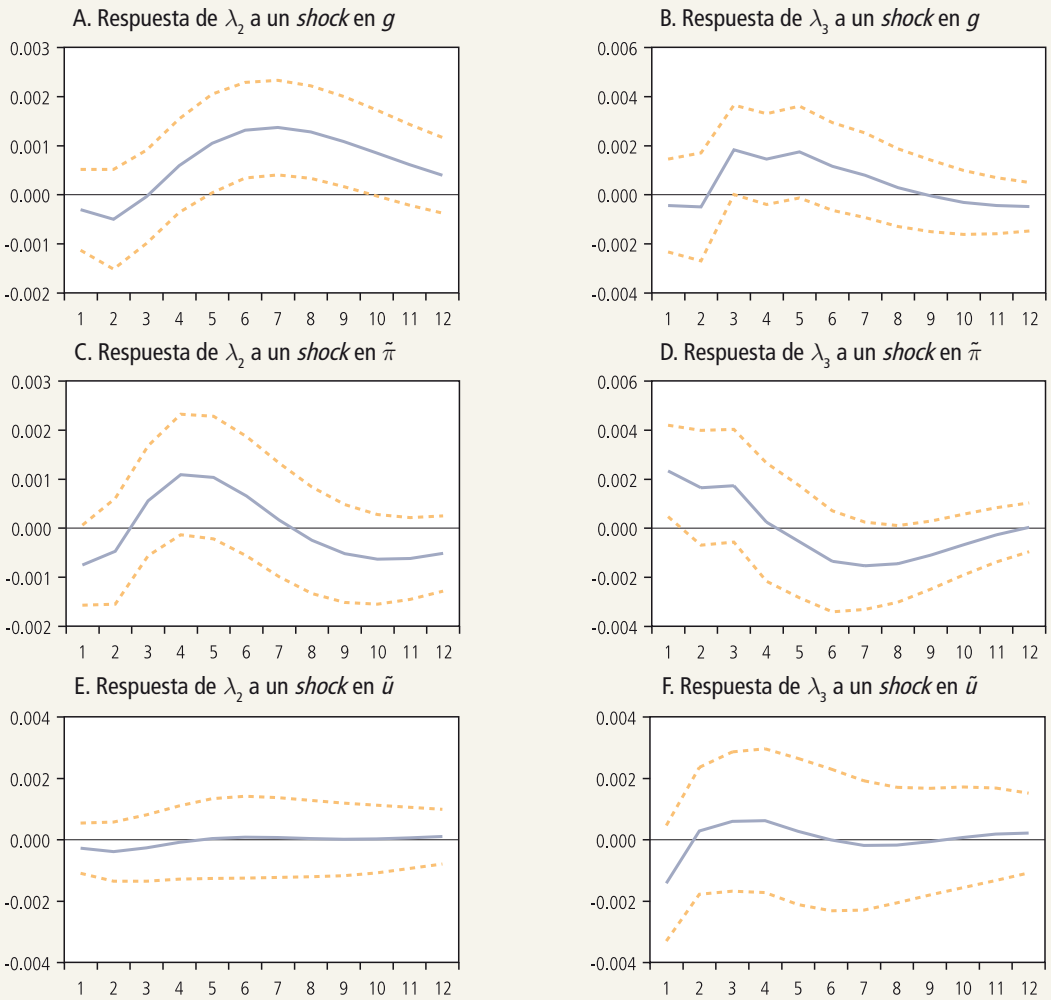
5. Se debe recordar que λ_2 corresponde al negativo de la pendiente de la estructura de tasas, por lo que un aumento de este parámetro es equivalente a una disminución de la pendiente de dicha curva.

valor de largo plazo. Por consiguiente, un aumento transitorio de este parámetro se traduciría en un aumento a mediano plazo de la inflación (en torno a seis meses luego de ocurrido el *shock*).

El gráfico 2, por su parte, muestra la respuesta del mercado financiero ante *shocks* en el sector real de la economía. De ella apreciamos que sólo los *shocks* en la actividad económica afectan de forma estadísticamente significativa a la pendiente de la curva de rendimiento. Si bien en el muy corto plazo un aumento transitorio de la actividad económica no se traduce en un incremento significativo de la pendiente de la curva rendimiento (una disminución del parámetro λ_2), en el mediano plazo —entre seis y nueve meses luego de ocurrido el *shock*— la pendiente de la curva de rendimiento tendería a disminuir, en línea con Estrella y Hardouvelis (1991).

GRÁFICO 2

Respuesta del Sector Financiero a un *Shock* en el Sector Real



Fuente: Elaboración propia.

V. Conclusiones

En este artículo presentamos la derivación del modelo DNS utilizando la hipótesis de expectativas en logaritmos, lo que lleva a un resultado similar al de Alfaro (2011). De esta forma, es posible resumir la estructura de tasas de interés con tres factores. Adicionalmente se presentan dos características de las tasas de interés las cuales pueden ser utilizadas para estimar la estructura de tasas. En particular, en este artículo se explota la relación de cointegración la cual nos permite identificar el parámetro de persistencia del segundo y tercer factor del modelo DNS. Finalmente, una aplicación macroeconómica da cuenta de la relación entre las variables financieras medidas de actividad y nivel de precios.

Referencias

Alfaro, R. (2011). "Affine Nelson-Siegel Model." *Economics Letters* 110(1): 1–3.

Alfaro, R. y J.S. Becerra (2011). "Uso de la Aproximación TIR/Duración en la Estructura de Tasas: Resultados Cuantitativos Bajo Nelson-Siegel." Documento de Trabajo N°616, Banco Central de Chile.

Alfaro, R. y A. Sagner (2011). "Stress Testing for Banking Sector: A Technical Note." Documento de Trabajo N°610, Banco Central de Chile.

Balduzzi, P., S. Das y S. Foresi (1998). "The Central Tendency: A Second Factor in Bond Yields." *Review in Economics and Statistics* 80: 62–72.

Campbell, J.Y., A.W. Lo y A.C. MacKinlay (1997). *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton, NJ, EE.UU.: Princeton University Press.

Chan, K., G. Karolyi, F. Longstaff y A. Sanders (1992). "An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate." *Journal of Finance* 47(3): 1209–27.

Christensen, J.H.E., F.X. Diebold y G.D. Rudebusch (2009). "The Affine Arbitrage–Free Class of Nelson–Siegel Term Structure Models." Documento de Trabajo N°07–029, Departamento de Economía, Universidad de Pennsylvania.

Coroneo, L., K. Nyholm y R. Vidova–Koleva (2008). "How Arbitrage–Free is the Nelson–Siegel Model?" Documento de Trabajo N°874, Banco Central Europeo.

Cortázar, G., E. Schwartz y L. Naranjo (2007). "Term Structure Estimation in Markets with Infrequent Trading." *International Journal of Finance and Economics* 12(4): 353–69.

Cox, J., J. Ingersoll y S. Ross (1985). "A Theory of the Term Structure of Interest Rate." *Econometrica* 53: 385–407.

Davidson, R. y J. Mackinnon (1993). "Estimation and Inference in Econometrics." Oxford University Press.

Diebold, F.X. y C. Li (2006). "Forecasting the Term Structure of Government Bond Yield." *Journal of Econometrics* 130: 337–64.

Diebold, F.X., G.D. Rudebush y S.B. Aruoba (2006). "The Macroeconomy and the Yield Curve: A Dynamic Latent Factor Approach." *Journal of Econometrics* 131: 309–38.

Duffee, G.R. (2002) "Term Premia and Interest Rate Forecast in Affine Models." *Journal of Finance* 57(1): 405–43.

Estrella, A. y G. Hardouvelis (1991). "The Term Structure as a Predictor of Real Economic Activity." *Journal of Finance* 46(2): 555–76.

Fernández, V. (1999). "Estructura de Tasas de Interés en Chile: La Vía No Paramétrica." *Cuadernos de Economía* 36(109): 1005–34.

Hall, A.D., H.M. Anderson y C. Granger (1992). "A Cointegration Analysis of Treasury Bill Yields." *Review of Economics and Statistics* 74: 116–26.

Herrera, L.O. e I. Magendzo (1997). "Expectativas Financieras y la Curva de Tasas *Forward* de Chile." Documento de

Trabajo N°23, Banco Central de Chile.

Lefort, F. y E. Walker (2000). "The Structure of Real Interest Rates in Chile." *Economía Chilena* 3(2): 31–52.

Morales, M. (2008) "The Real Yield Curve and Macroeconomic Factors in the Chilean Economy." *Applied Economics* 2008: 1–13.

Nelson, C. y A. Siegel (1987). "Parsimonious Modeling of Yield Curve." *The Journal of Business* 60(4): 473–89.

Ochoa, J. (2006). "An Interpretation of an Affine Term Structure Model for Chile." *Estudios de Economía* 33(2): 155–84.

Parisi, F. (1998). "Tasa de Interés Nominal de Corto Plazo en Chile: Una Comparación Empírica de sus Modelos." *Cuadernos de Economía* 35(105): 161–82.

Pesaran, H. y Y. Shin (1998). "Generalized Impulse Response Analysis in Linear Multivariate Models." *Economic Letters* 58: 17–29.

Shea, G.S. (1992). "Benchmarking the Expectations Hypothesis of the Interest-Rate Term Structure: An Analysis of Cointegration Vectors." *Journal of Business and Economic Statistics* 10: 347–66.

Shreve, S. (2004). *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous–Time Models*, Springer Finance.

Söderlind, P. (2010) "Reaction of Swiss Term Premia to Monetary Policy Surprises." *Swiss Journal of Economics and Statistics* 146(1): 385–404.

Spiegel, M. y J. Liu (1999). *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*, segunda edición. Schaum's Outline Series: McGraw-Hill.

Svensson, L.E.O. (1994). "Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992-1994." Documento de Trabajo N°579, Stockholm–International Economic Studies.

Tapia, C. (2008). "Modelación de Spreads en Mercados Emergentes: Estimación Multi-Familia Usando Filtro de Kalman." Mimeo, Pontificia Universidad Católica de Chile.

Vasicek, O. (1977). "An Equilibrium Characterization of the Term Structure." *Journal of Financial Economics* 5(2): 177–88.

Wilmott, P. (2007). *Paul Wilmott Introduces Quantitative Finance*, segunda edición. NJ, EE.UU.: John Wiley & Sons Ltd.

Zúñiga, S. (1999). "Modelos de Tasas de Interés en Chile: Una Revisión." *Cuadernos de Economía* 36(108): 875–93.

Zúñiga, S. y K. Soria (1999). "Estimación de la Estructura Temporal de Tasas de Interés en Chile, 1994–1997." *Estudios de Administración* 6(1): 25–50.

APÉNDICE

Demostraciones

Este apéndice presenta las demostraciones de las proposiciones presentadas en el texto.

Proposición 1

Recordemos que el modelo supone que la tasa corta depende de dos factores dinámicos ($z_{1t} = \lambda_{1t} + \lambda_{2t}$), los cuales obedecen a una dinámica conjunta como sigue:

$$\Lambda_t \equiv \begin{pmatrix} \lambda_{1t} \\ \lambda_{2t} \\ \lambda_{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \phi & (1-\phi) \\ 0 & 0 & \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{1t-1} \\ \lambda_{2t-1} \\ \lambda_{3t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \\ e_{3t} \end{pmatrix}, \tag{A.1}$$

donde los errores tienen media cero y varianzas y covarianzas finitas. Lo anterior también puede formularse de forma compacta, definiendo:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \phi & (1-\phi) \\ 0 & 0 & \phi \end{pmatrix}. \tag{A.2}$$

De esta forma $\Lambda_t = F\Lambda_{t-1} + U_t$, donde U_t contiene el vector de errores del modelo. Para construir la curva de rendimiento, necesitamos computar $E_t(z_{1t+i})$, el cual corresponde al valor esperado de la tasa corta, la que es una combinación lineal de los factores 1 y 2. Tomando un vector fila como $b = (1\ 1\ 0)$, podemos escribir la tasa corta como $b\Lambda_t$. De forma análoga, tenemos que $E_t(z_{1t+i}) = E_t(b\Lambda_{t+i}) = bE_t(\Lambda_{t+i}) = bF^i\Lambda_t$, es decir, lo que necesitamos para conocer el valor esperado es obtener F^i.

Podemos derivar lo anterior de forma recursiva. Notamos que

$$F^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \phi & (1-\phi) \\ 0 & 0 & \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \phi & (1-\phi) \\ 0 & 0 & \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \phi^2 & 2\phi(1-\phi) \\ 0 & 0 & \phi^2 \end{pmatrix},$$

mientras que

$$F^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \phi^2 & 2\phi(1-\phi) \\ 0 & 0 & \phi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \phi & (1-\phi) \\ 0 & 0 & \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \phi^3 & 3\phi^2(1-\phi) \\ 0 & 0 & \phi^3 \end{pmatrix}.$$

Generalizando, tenemos que

$$F^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \phi^i & i\phi^{i-1}(1-\phi) \\ 0 & 0 & \phi^i \end{pmatrix}. \tag{A.3}$$

Con ello, tenemos que el valor esperado que nos interesa calcular corresponde a

$$\begin{aligned} E_t\left(z_{1t+i}\right) &= bF^i\Lambda_t = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & \phi^i & i\phi^{i-1}(1-\phi) \\ 0 & 0 & \phi^i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_{1t} \\ \lambda_{2t} \\ \lambda_{3t}\end{pmatrix} \\ &= \lambda_{1t} + \phi^i\lambda_{2t} + i(1-\phi)\phi^{i-1}\lambda_{3t} \end{aligned} \tag{A.4}$$

Así, pese a que la tasa corta no depende directamente del tercer factor, su valor esperado sí, debido a que este corresponde a la tendencia estocástica del segundo factor. Por este motivo, se considera el tercer factor como una variable latente.

Por series, sabemos que (Spiegel y Liu, 1999):

$$\sum_{i=0}^{n-1}\phi^i = \frac{1-\phi^n}{1-\phi} \text{ y } \sum_{i=1}^{n-1} i\phi^i = \phi\left[\frac{1-n\phi^{n-1}+(n-1)\phi^n}{(1-\phi)^2}\right]. \tag{A5}$$

El último resultado es relevante para analizar el componente que acompaña al tercer factor en la predicción de la tasa corta. En particular, notamos que:

$$\sum_{i=0}^{n-1} i(1-\phi)\phi^{i-1} = \left(\frac{1-\phi}{\phi}\right)\sum_{i=1}^{n-1} i\phi^i = \frac{1-n\phi^{n-1}+(n-1)\phi^n}{1-\phi} = \left(\frac{1-\phi^n}{1-\phi}\right) - n\phi^{n-1}.$$

De este modo, aplicando la Hipótesis de Expectativas en Logaritmo, tenemos que

$$\begin{aligned} z_{nt} &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left[\lambda_{1t} + \phi^i\lambda_{2t} + i(1-\phi)\phi^{i-1}\lambda_{3t}\right] \\ &= \lambda_{1t} + \left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\phi^i\right)\lambda_{2t} + \left[\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} i(1-\phi)\phi^{i-1}\right]\lambda_{3t} \\ &= \lambda_{1t} + \frac{\lambda_{2t}}{n}\left(\frac{1-\phi^n}{1-\phi}\right) + \frac{\lambda_{3t}}{n}\left[\frac{1-\phi^n}{1-\phi} - n\phi^{n-1}\right] \end{aligned}$$

La última ecuación se obtiene de aplicar los resultados de series presentados anteriormente. Con todo, observamos que el resultado final implica que el modelo obtenido corresponde a Nelson-Siegel.

Proposición 2

Utilizando el operador de rezagos L, tenemos que los factores 2 y 3 pueden formularse como sigue:

$$\lambda_{3t} = \frac{e_{3t}}{1-\phi L} \text{ y } \lambda_{2t} = \frac{(1-\phi)\lambda_{3t-1} + e_{2t}}{1-\phi L} = \frac{(1-\phi)e_{3t-1} + (1-\phi L)e_{2t}}{(1-\phi L)^2}. \tag{A.6}$$

Considerando $F_n = \phi^n$, $G_n = (1-\phi^n)/[n(1-\phi)]$ y $H_n = G_n - F_{n-1}$, tenemos que la tasa de madurez n es $z_{nt} = \lambda_{1t} + G_n\lambda_{2t} + H_n\lambda_{3t}$. Tomando la primera diferencia, tenemos que

$$\begin{aligned}
\Delta z_{nt} &= (\lambda_{1t} - \lambda_{1t-1}) + G_n(\lambda_{2t} - \lambda_{2t-1}) + H_n(\lambda_{3t} - \lambda_{3t-1}) \\
&= e_{1t} + G_n\left[(\phi-1)\lambda_{2t-1} + (1-\phi)\lambda_{3t-1} + e_{2t}\right] + H_n\left[(\phi-1)\lambda_{3t-1} + e_{3t}\right] \\
&= e_{1t} + G_n e_{2t} + H_n e_{3t} + (1-\phi)(G_n\lambda_{3t-1} - G_n\lambda_{2t-1} - H_n\lambda_{3t-1}) \\
&= e_{1t} + G_n e_{2t} + H_n e_{3t} + (1-\phi)(F_{n-1}\lambda_{3t-1} - G_n\lambda_{2t-1}) \\
&= e_{1t} + G_n e_{2t} + H_n e_{3t} + (1-\phi)X
\end{aligned} \tag{A.7}$$

donde

$$\begin{aligned}
X &= F_{n-1}\left[\frac{e_{3t-1}}{1-\phi L}\right] - G_n\left[\frac{(1-\phi)e_{3t-2} + (1-\phi L)e_{2t-1}}{(1-\phi L)^2}\right] \\
&= \frac{(1-\phi L)F_{n-1}e_{3t-1} - G_n(1-\phi)e_{3t-2} - G_n(1-\phi L)e_{2t-1}}{(1-\phi L)^2}
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Reemplazando (A.8) en (A.7), notamos que el lado derecho de este último puede ser factorizado bajo un mínimo común denominador $(1 - \phi L)^2$, lo que implica que el numerador tendrá una estructura similar a un proceso $MA(2)$. Notamos que los signos de las autocovarianzas dependen de la madurez de la tasa.

Proposición 3

De acuerdo con lo anterior, la tasa es $z_{nt} = \lambda_{1t} + G_n\lambda_{2t} + H_n\lambda_{3t}$, con G_n y H_n definidos en la Proposición 2. Luego, para tres tasas z_a, z_b y z_c tenemos lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} z_{at} \\ z_{bt} \\ z_{ct} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & G_a & H_a \\ 1 & G_b & H_b \\ 1 & G_c & H_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{1t} \\ \lambda_{2t} \\ \lambda_{3t} \end{pmatrix} \tag{A.9}$$

De forma compacta, $Z_t = A\Lambda_t$. Entonces, para $B = A^{-1}$, tenemos $\hat{\Lambda} = BZ$, siendo

$$B = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} G_bH_c - G_cH_b & G_cH_a - G_aH_c & G_aH_b - G_bH_a \\ H_b - H_c & H_c - H_a & H_a - H_b \\ G_c - G_b & G_a - G_c & G_b - G_a \end{pmatrix},$$

con $D = G_a(H_b - H_c) - G_b(H_a - H_c) + G_c(H_a - H_b)$. Tomando b_{ij} como el componente de la fila i y la columna j de B, se tiene que:

$$\sum_{k=1}^{3} b_{1k} = D \text{ y } \sum_{k=1}^{3} b_{2k} = \sum_{k=1}^{3} b_{3k} = 0.$$

Así, existe el vector $\Theta = (\theta_a\ \theta_b\ \theta_c)$, tal que $z_{nt} = \theta_a z_{at} + \theta_b z_{bt} + \theta_c z_{ct}$.

Esto, porque: $z_{nt} = (1\ \ G_{nt}\ \ H_{nt})\ \hat{\Lambda} = (1\ \ G_{nt}\ \ H_{nt})BZ_t = \Theta Z_t$. Notamos que $\theta_a = b_{11} + b_{21}G_n + b_{31}H_n$, $\theta_b = b_{12} + b_{22}G_n + b_{32}H_n$ y $\theta_c = b_{13} + b_{23}G_n + b_{33}H_n$; por lo tanto, $\theta_a + \theta_b + \theta_c = 1$.